TEMA 3

FUNCIONES COMPLEJAS ELEMENTALES

1. Función exponencial y funciones definidas mediante la exponencial

1.1 La función exponencial

Definición. La **función exponencial compleja** es aquélla que a cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ le asigna el número complejo $e^x(cosy + i\,\mathrm{sen}\,y)$ que se denota e^z ó $\exp(z)$.

Propiedades de la función exponencial

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$, se verifica $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ y $\arg(e^z) = \{\mathrm{Im}\,z + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\exp(\mathbb{C}) = \{e^z \ : \ z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple $\begin{cases} e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \\ e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}. \end{cases}$

4. exp es periódica de periodo $2\pi i$ y se verifica:

i) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. En particular, $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

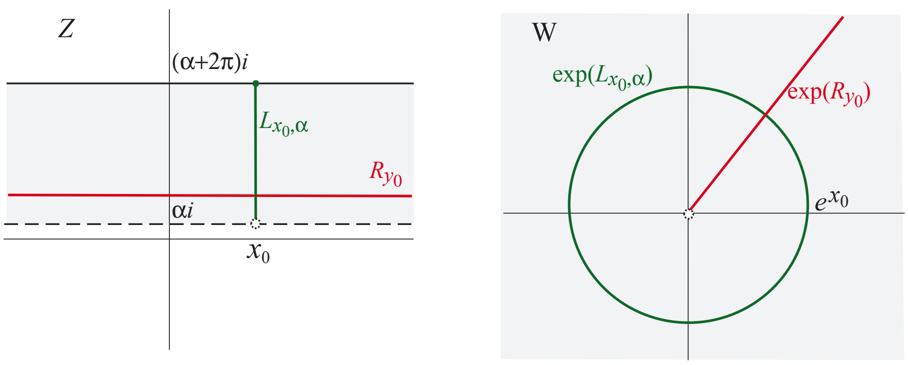
ii) $\exp\left(\{x + iy \ : \ x \in \mathbb{R} \wedge \alpha < y \leq \alpha + 2\pi\}\right) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

5. exp es entera siendo $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Geometría de la función exponencial

1. Sean $x_0, \alpha \in \mathbb{R}$, si $L_{x_0,\alpha} = \{x_0 + iy : y \in (\alpha, \alpha + 2\pi]\} \Rightarrow \exp\left(L_{x_0,\alpha}\right) = C(0, e^{x_0}) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, donde $C(0, e^{x_0})$ denota la circunferencia de centro el origen y radio e^{x_0}.

2. Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, si $R_{y_0} = \{x + iy_0 \ : \ x \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow \exp(R_{y_0}) = \{re^{iy_0} \ : \ r > 0\}$.



1.2 Funciones trigonométricas

Dado $x \in \mathbb{R}$: $\left\{ \begin{array}{l} e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array} \right.$

Definición. Las funciones seno y coseno complejas se definen para cada $z \in \mathbb{C}$ como

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Propiedades de las funciones complejas seno y coseno

1. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(-z) = \cos z$.
2. Identidades trigonométricas:
   - i) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$; de donde $\operatorname{sen}(z + \pi/2) = \cos z$.
   - ii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$.
   - iii) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
3. Periodicidad: $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$ y $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.

4. Relación con las funciones hiperbólicas reales $\operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ y $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$:
   Si $z = x + iy$ entonces
   - i) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$.
   - ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
5. Conjugadas de las funciones trigonométricas: $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \overline{z}$ y $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$.
6. Las funciones seno y coseno no son acotadas en módulo. Se deduce de las relaciones:
   - i) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.
   - ii) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.
7. Ceros de las funciones seno y coseno:
   - i) $\operatorname{sen} z = 0$ si y sólo si $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   - ii) $\cos z = 0$ si y sólo si $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
8. Las funciones seno y coseno son enteras, verificándose que

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z \qquad \frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z$$

Otras funciones trigonométricas

Función tangente: $\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ Función cotangente: $\cot z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

Función secante: $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ Función cosecante: $\csc z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

Propiedades

1. $\tan z$ y $\sec z$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$. Siendo

$$\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z \quad y \quad \frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z$$

2. $\cot z$ y $\csc z$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Siendo

$$\frac{d}{dz} \cot z = -\csc^2 z \quad y \quad \frac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cot z$$

3. Periodicidad: $\tan z$ y $\cot z$ son periódicas de periodo π y $\sec z$ y $\csc z$ de periodo 2π.

1.3 Funciones hiperbólicas

Definición. Se definen las funciones complejas seno y coseno hiperbólicos para cada $z \in \mathbb{C}$ como

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Propiedades de las funciones hiperbólicas complejas

1. $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$ y $\cosh(-z) = \cosh z$.
2. Relación con las funciones trigonométricas complejas:
   i) $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$ y $\cosh z = \cos(iz)$.
   ii) $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz)$ y $\cos z = \cosh(iz)$.
3. Identidades
   i) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$.
   ii) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$.
   iii) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
4. Periodicidad: $\operatorname{senh}(z + 2\pi i) = \operatorname{senh} z$ y $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$.

5. Relación con las funciones hiperbólicas reales: Si $z = x + iy$ entonces
   i) $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.
   ii) $\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.
6. Conjugadas de las funciones hiperbólicas: $\overline{\operatorname{senh} z} = \operatorname{senh} \overline{z}$ y $\overline{\cosh z} = \cosh \overline{z}$.
7. Las funciones seno y coseno hiperbólicas no son acotadas en módulo, obviamente pues restringidas a $\mathbb{R}$ no son acotadas. Además, se verifican las siguientes relaciones:
   i) $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$.
   ii) $|\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y$.
8. Ceros de las funciones seno y coseno hiperbólicos:
   i) $\operatorname{senh} z = 0$ si y sólo si $z = k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   ii) $\cosh z = 0$ si y sólo si $z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
9. Las funciones seno y coseno hiperbólicos son enteras, verificándose que

$$\frac{d}{dz} \operatorname{senh} z = \cosh z \qquad \frac{d}{dz} \cosh z = \operatorname{senh} z$$

Otras funciones hiperbólicas

Tangente hiperbólica: $\tanh z = \dfrac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$ Cotangente hiperbólica: $\coth z = \dfrac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}$

Secante hiperbólica: $\operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}$ Cosecante hiperbólica: $\operatorname{csch} z = \dfrac{1}{\operatorname{senh} z}$

Propiedades

1. $\tanh z$ y $\operatorname{sech} z$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i; \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. Siendo

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z \quad y \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$$

2. $\coth z$ y $\operatorname{csch} z$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{k\pi i; \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Siendo

$$\frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z \quad y \quad \frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$$

3. Periodicidad: $\tanh z$ y $\coth z$ son periódicas de periodo πi y $\operatorname{sech} z$ y $\operatorname{csch} z$ de periodo $2\pi i$.

2.1 La función logaritmo y sus ramas

Para definir una función compleja inversa de la exponencial hay que tener en cuenta:

$$1)\ e^w \neq 0, \quad \forall w \in \mathbb{C} \qquad 2)\ e^w = z \neq 0 \Longleftrightarrow w = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Definición.

Dado $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se define $\begin{cases} \textbf{logaritmo de } z\text{: } \log z = \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \\ \textbf{logaritmo principal de } z\text{: } \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \end{cases}$

De la función multivaluada log se define para $\alpha \in \mathbb{R}$ la **rama o determinación del logaritmo**

$$\log_\alpha z = \ln|z| + i \arg_\alpha z,$$

donde $\arg_\alpha$ es la rama de arg con valores en $(\alpha, \alpha + 2\pi)$. Por tanto,

- Dominio de definición de $\log_\alpha$ es $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$. El conjunto $C_\alpha = \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$ se denomina corte de ramificación de la rama $\log_\alpha$.
- La imagen de $\log_\alpha$ es $\{w \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} w < \alpha + 2\pi\}$.
- Si $\alpha = -\pi \Longrightarrow \log_\alpha = \operatorname{Log}$ es la rama principal del logaritmo.
- Si C_α semirrecta que parte del origen con pendiente $\alpha \in [0, 2\pi)$, existen infinitas ramas del logaritmo distintas con corte de ramificación C_α:
  $f_k(z) = \ln|z| + i(\arg_\alpha z + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$

Propiedades

1. $e^{\log_\alpha z} = z \quad \forall z \in \Omega_\alpha\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2. $\log_\alpha(e^z) \neq z$ y se verifica $\begin{cases} \log_\alpha(e^z) = z + 2k\pi i, \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}. \\ \log_\alpha(e^z) = z \text{ si y sólo si } \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi. \\ \log(e^z) = \{z + 2k\pi i \,:\, k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$

3. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\log_\alpha(z_1 \cdot z_2) \neq \log_\alpha z_1 + \log_\alpha z_2$, y se verifica:

i) $\log_\alpha(z_1 \cdot z_2) = \log_\alpha z_1 + \log_\alpha z_2 + 2k\pi i$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Fijadas dos ramas del logaritmo, existe una tercera verificando

$$\log_{\alpha_0}(z_1 \cdot z_2) = \log_{\alpha_1} z_1 + \log_{\alpha_2} z_2.$$

4. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\log_\alpha(z_1/z_2) \neq \log_\alpha z_1 - \log_\alpha z_2$, y se verifica:

i) $\log_\alpha(z_1/z_2) = \log_\alpha z_1 - \log_\alpha z_2 + 2k\pi i$ siendo $k \in \mathbb{Z}$ dependiente de z_1 y z_2.

ii) Fijadas dos ramas del logaritmo, existe una tercera verificando

$$\log_{\alpha_0}(z_1/z_2) = \log_{\alpha_1} z_1 - \log_{\alpha_2} z_2.$$

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\log_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega_\alpha)$ siendo $\dfrac{d \log_\alpha z}{dz} = \dfrac{1}{z} \qquad \forall z \in \Omega_\alpha$.

2.2 Exponentes complejos: funciones potenciales y exponenciales

Definición. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, siendo $z \neq 0$, la **potencia de base z y exponente w** es

$$z^w = \{e^{w(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{w(\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Para un valor del logaritmo, $\log_\alpha z$, se tiene el único valor[1] $z^w = e^{w \log_\alpha z} = e^{w(\ln|z| + i \arg_\alpha z)}$.

Propiedades

1. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, de $e^{w(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)} = e^{w \operatorname{Log} z} e^{w 2k\pi i}$ se sigue

i) Si $w \in \mathbb{Q} \Rightarrow z^w$ conjunto finito pues:
- Dado $n \in \mathbb{N} \Rightarrow z^n = \{z \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot z\}$ y $z^{-n} = \{z^{-1} \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot z^{-1}\}$
- si $w = 1/n \Rightarrow z^w$ es el conjunto de las n raíces n-ésimas de z.

ii) Si $w \notin \mathbb{Q} \Rightarrow z^w$ es infinito y sus elementos difieren entre sí en un factor de la forma $e^{w2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, fijadas las determinaciones de dos potencias de las 3 que involucra la fórmula de los siguientes casos, existe una de la tercera potencia verificando:

i) $z^{w_1 + w_2} = z^{w_1} z^{w_2}$. **ii)** $z^{w_1 - w_2} = \dfrac{z^{w_1}}{z^{w_2}}$.

[1] Se utiliza la misma notación que para el conjunto de infinitos valores, por lo que en el contexto se debe especificar.

Funciones potenciales

Dado $w \in \mathbb{C}$, la función potencial multivaluada $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{C}) \\ z & \longrightarrow & z^w \end{array}$

determina, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la **rama o determinación de la función potencial** de potencia w o α-rama de z^w: $\begin{array}{ccc} \Omega_\alpha = \mathbb{C}\setminus\{re^{i\alpha} : r \geq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & e^{w \log_\alpha z} =: z^w \end{array}$

que es holomorfa en Ω_α siendo $\dfrac{dz^w}{dz} = wz^{w-1} \quad \forall z \in \Omega_\alpha$, y donde $z^{w-1} = e^{(w-1)\log_\alpha z}$.

Observación: Sea $w \in \mathbb{Z}$.

a) Para $w = n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\cup\{0\}$, la función entera definida para cada $z \in \mathbb{C}$ por $z^n = z \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot z$ restringida a Ω_α coincide con la α-rama de z^w, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Para $w = -n$, con $n \in \mathbb{N}$, la función definida por $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, que es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, restringida a Ω_α coincide con la α-rama de z^w, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

Funciones exponenciales

Dado $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, la función exponencial multivaluada $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{C}) \\ z & \longrightarrow & w^z \end{array}$

determina, para cada $k \in \mathbb{Z}$, la **rama o determinación de la función exponencial de base w** $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & e^{z(\operatorname{Log} w + i2k\pi)} =: w^z \end{array}$

que es entera y cuya derivada es

$$\frac{dw^z}{dz} = w^z \cdot (\operatorname{Log} w + i2k\pi) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

2.3 Funciones inversas trigonométricas e hiperbólicas

Funciones inversas trigonométricas

Las funciones inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas son multivaluadas pues vienen definidas a través del logaritmo. Por ejemplo, dado $w \in \mathbb{C}$, w puede ser considerado un valor de $\operatorname{arcsen} z$ si verifica

$$\operatorname{sen} w = z \iff z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \iff \left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se llega a

$$\operatorname{arcsen} z = \left\{-i\left(\ln|iz \pm \sqrt{1-z^2}| + i\left(\operatorname{Arg}(iz \pm \sqrt{1-z^2}) + 2k\pi\right)\right) : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

donde $\sqrt{1-z^2}$ denota uno de los dos valores de la raíz. Abreviadamente

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right),$$

donde la raíz y el logaritmo indican las funciones multivaluadas.
Fijada una rama del logaritmo y otra de la raíz se obtiene una función arco seno cuyo dominio de holomorfía queda determinado por ambas ramas siendo su derivada

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arcsen} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

De forma análoga se obtienen las funciones arco coseno y arco tangente. En el siguiente cuadro, donde las derivadas deben entenderse referidas a las ramas y definidas en el correspondiente dominio de holomorfía, se reúnen estas funciones:

$\operatorname{arcsen} z = -i \log\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right)$	$\dfrac{d}{dz} \operatorname{arcsen} z = \dfrac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$
$\arccos z = -i \log(z + (z^2-1)^{1/2})$	$\dfrac{d}{dz} \arccos z = -\dfrac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$
$\arctan z = \dfrac{i}{2} \log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right), \quad z \neq \pm i$	$\dfrac{d}{dz} \arctan z = \dfrac{1}{1+z^2}.$

Funciones inversas hiperbólicas

De forma similar al caso de las funciones trigonométricas se obtienen las inversas de las funciones hiperbólicas, recogidas en el siguiente cuadro, donde nuevamente las derivadas deben entenderse referidas a las ramas y en el correspondiente dominio de holomorfía:

$\operatorname{arcsenh} z = \log(z + (z^2+1)^{1/2})$	$\dfrac{d}{dz} \operatorname{arcsenh} z = \dfrac{1}{(z^2+1)^{1/2}}$
$\operatorname{arccosh} z = \log(z + (z^2-1)^{1/2})$	$\dfrac{d}{dz} \operatorname{arccosh} z = \dfrac{1}{(z^2-1)^{1/2}}$
$\operatorname{arctanh} z = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right), \quad z \neq \pm 1$	$\dfrac{d}{dz} \operatorname{arctanh} z = \dfrac{1}{1-z^2}$